第28講　確率変数の和と積

§1 確率変数の和の期待値

要点整理 と 公式

要点 ① 同時分布，確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X，Y について，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を

$$P(X=a,\ Y=b)$$

と表す。

X のとる値が x_1，x_2，……，x_n，Y のとる値が y_1，y_2，……，y_m であるとき，$X=x_i$ かつ $Y=y_j$ である確率 $P(X=x_i,\ Y=y_j)$ を p_{ij}，$P(X=x_i)=p_i$，$P(Y=y_j)=q_j$ とすると，X，Y の確率分布は右の表のようになる。この対応を X と Y の「　　　　　」という。

X＼Y	y_1	y_2	…	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	
計			…		

この表から

$$P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\cdots\cdots+p_{im}=p_i$$

$$P(Y=y_j)=p_{1j}+p_{2j}+\cdots\cdots+p_{nj}=q_j$$

が成り立つ。

2 つの確率変数 X，Y の和を $Z=X+Y$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，$Z=X+Y$ の期待値は

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$E(Z)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)\qquad+(\qquad)p_{21}+$$

$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$$

$$=x_1\quad+x_2\quad+y_1\quad+y_2$$

$$=E(X)+E(Y)$$

一般に，次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X，Y について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

例 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の和の期待値を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

同様に $E(Y)=\frac{7}{2}$

したがって，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\quad+\quad=7$$

　確率変数 X と定数 a，b について，$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成り立つことから，確率変数 X，Y と定数 a，b について

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

が成り立つ。また，3 つの確率変数 X，Y，Z についても

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ。

1 100 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 1 枚を同時に投げる。

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y と定数 a, b について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

[MEMO]

§2 独立な確率変数

要点整理 と 公式

要点① 独立な確率変数，独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X，Y において，X のとる値 x_i と Y のとる値 y_j について，どのような x_i，y_j に対しても

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

が成り立つとき，確率変数 X，Y は互いに「　　　」であるという。

例 2 つの確率変数 X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき

X ＼ Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P(X=0,\ Y=1)=\quad=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=1)=\quad\cdot\quad=\frac{1}{4}$$

よって $P(X=0,\ Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

X，Y の値のすべての組に関して同様の式が成り立つ。よって，X，Y は独立である。

2 つの試行 S，T が独立であるとき，S における確率変数 X と T における確率変数 Y は独立である。

2 つの独立な確率変数 X，Y の積を $Z=XY$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，X と Y は独立であるから

X ＼ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$p_{11}=\qquad$，$p_{12}=p_1q_2$，$p_{21}=p_2q_1$，$p_{22}=p_2q_2$

よって
$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1y_1)p_{11}+(x_1y_2)p_{12}+(x_2y_1)p_{21}+(x_2y_2)p_{22}\\&=(x_1y_1)p_1q_1+(x_1y_2)p_1q_2+(x_2y_1)p_2q_1+(x_2y_2)p_2q_2\\&=x_1p_1\cdot y_1q_1+x_1p_1\cdot y_2q_2+x_2p_2\cdot y_1q_1+x_2p_2\cdot y_2q_2\\&=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の期待値

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

例 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の積の期待値を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは XY の期待値である。

$$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

X，Y は独立であるから，出る目の積 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\quad\cdot\quad=\frac{49}{4}$$

要点 ② 独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ。これを用いると，和 $X+Y$ の分散について，分散の公式より

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left((X+Y)^2\right)-\{E(X+Y)\}^2\\&=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\&=E\left(X^2\right)+2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2\right]\\&=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2+E\left(Y^2\right)-\{E(Y)\}^2=V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

例 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の和の分散を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の分散である。

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に $V(Y)=\dfrac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，出る目の和 $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\quad+\quad=\frac{35}{6}$$

互いに独立な 3 つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

$$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z),\quad V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$$

2　2つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

独立な確率変数の積の期待値と和の分散

確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

[MEMO]

第 28 講　確認テスト

1 1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある。この中から 1 枚引き，数を記録してからもとに戻し，もう 1 枚引く。1 回目と 2 回目に引いたカードに書かれた数の和の期待値を求めよ。 [ア]

2 500 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[イウエ] 円

3 2 つの確率変数 X，Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

$E(XY)=$ [オ]

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

$V(X+Y)=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{36}$

[MEMO]

第 28 講　確率変数の和と積

§1　確率変数の和の期待値

1　100 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 1 枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[解答]

表が出た 100 円硬貨，10 円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=55\,(円)$$

§2 独立な確率変数

2 2つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

[解答]

(1) $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

X, Y は独立より

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

(2) $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{2}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

X, Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

第 28 講　確認テスト 解答

1 **[正解]** ア：6

[解説]

1 回目と 2 回目に引いたカードに書かれた数をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}$$

$$=3$$

同様に

$$E(Y)=3$$

したがって，カードに書かれた数の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+3=6$$ [A]

[A]　2 つの確率変数 X，Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2 **[正解]** イウエ：300

[解説]

表が出た 500 円硬貨，100 円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(500X+100Y) \text{ [B]}$$
$$=500E(X)+100E(Y)$$
$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\mathbf{300}\text{（円）}$$

[B]　2 つの確率変数 X，Y と定数 a，b について
$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

3

(1)　**[正解]** オ：3

[解説]

X，Y の期待値はそれぞれ

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{5}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=2$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

X，Y は独立より

$$E(XY)=E(X)E(Y)=2\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{3}$$ [C]

[C]　確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

(2)　**[正解]** カキ：49

[解説]

$$E(X)=2$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{5}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{40}{9}$$

より，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{40}{9}-2^2=\dfrac{4}{9}$

$$E(Y)=\frac{3}{2}$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{2}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

より，$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\dfrac{19}{6}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

X，Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{4}{9}+\frac{11}{12}=\mathbf{\frac{49}{36}}$$ [D]

[D]　確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$